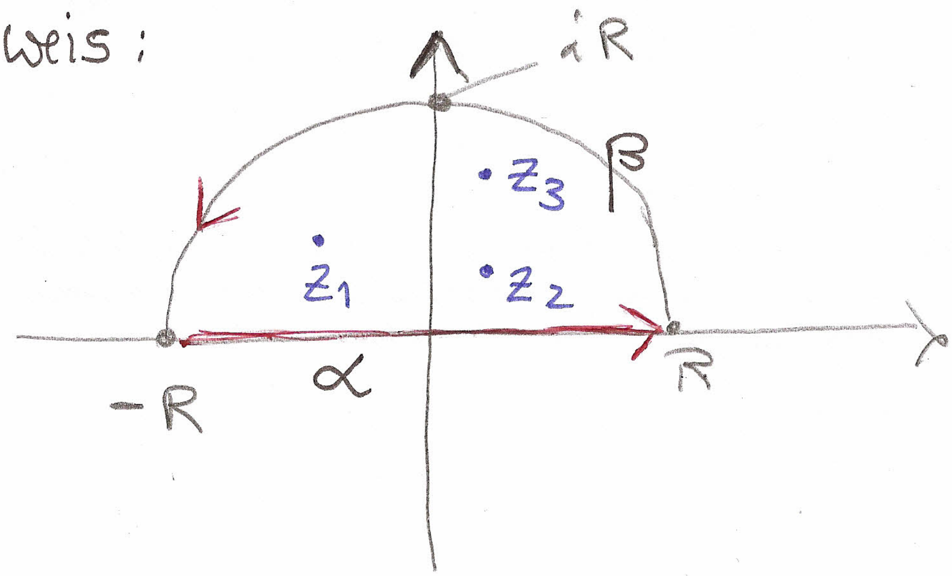
Beweis:



betrachte den Weg „$\gamma = \alpha + \beta$"

mit $R > 0$ so groß, dass die z_k umschlossen werden

$f = P/Q$

<u>Residuensatz</u> $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z_k} f \, ;$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz =$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_\beta f(z)\,dz$$

hierbei wurde benutzt:

$$\alpha : [-R, R] \ni x \mapsto x \in \mathbb{C}$$

ist Parametrisierung.

Für β wählt man

$$\beta : [0, \pi] \ni t \mapsto R e^{it}$$

$$\Rightarrow \left| \int_\beta f(z)\, dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\, iRe^{it} dt \right|$$

$$\leq R \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right|}_{\leq c R^{-2} \text{ für große } R} dt$$

$$\leq \text{const } \frac{1}{R} \longrightarrow 0, \; R \to \infty$$

Es folgt die Beh. $\square$

Nun zum Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad :$$

Hier ist $P(z) \equiv 1$, $Q(z) = (1+z^2)^2$

$\Longrightarrow$ Gradbedingung erfüllt!

Außerdem hat Q keine reelle Nullstelle.

Q verschwindet in $z_1 = i$, $z_2 = -i$;

z_1 liegt in der oberen Halbebene $\Longrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

Berechnung von $\operatorname{Res}_i \frac{1}{(1+z^2)^2}$:

Es ist

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2\,(z+i)^2}$$

gemäß $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Die Funktion $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ hat also in z_1 einen Pol der Ordnung $\underline{\underline{2}}$ $\xrightarrow[\text{Satz 25.1.1 ii)}]{}$

$$\operatorname{Res}_i \frac{1}{(1+z^2)^2} =$$

$$\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2 \cdot \frac{1}{(1+z^2)^2}\right\} \overset{=}{\text{s.o.}}$$

$$\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} =$$

$$\lim_{z\to i}\left[-\frac{2}{(z+i)^3}\right] = \frac{1}{4i} = -i/4$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\, dx = \pi/2 \qquad \square$$